

問題1 次の問いに答えなさい。

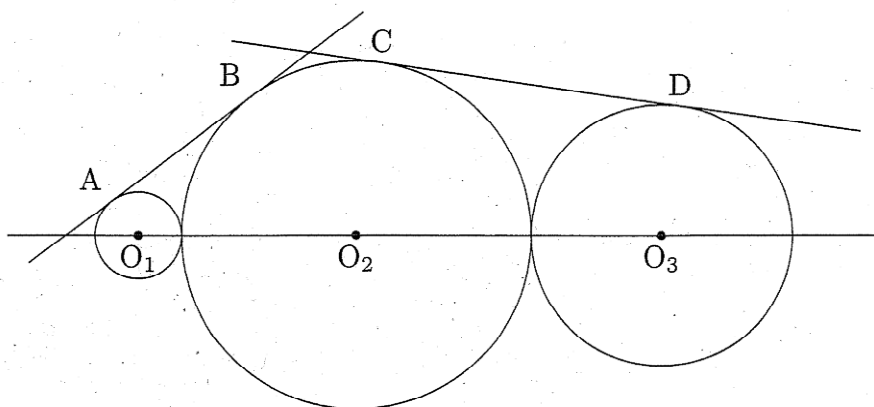
- (1) 関数 $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ を微分しなさい。
- (2) 等式 $\log_x(y - 2) + 1 = 2\log_{x^2}(y + 7)$ を満たす自然数 x, y の組 (x, y) をすべて求めなさい。

問題2 P を三角形 ABC の内部の点とする。三角形 PBC, PCA, PAB の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 等式 $2\vec{PA} + 3\vec{PB} + 4\vec{PC} = \vec{0}$ が成り立つとき、点 P は三角形 ABC に対してどのような位置にあるか求めなさい。また、 $S_1 : S_2 : S_3 = 2 : 3 : 4$ であることを示しなさい。
- (2) $S_1 : S_2 : S_3 = 2 : 3 : 4$ ならば、等式 $2\vec{PA} + 3\vec{PB} + 4\vec{PC} = \vec{0}$ が成り立つことを示しなさい。

問題3 下図において、3つの円 O_1, O_2, O_3 の中心は一直線上にあり、 O_2 は O_1, O_3 とそれぞれ外接している。直線 AB は O_1, O_2 にそれぞれ点 A, B で接しており、直線 CD は O_2, O_3 にそれぞれ点 C, D で接している。 O_1, O_2, O_3 の半径をそれぞれ $\frac{10 + \sqrt{2}}{4}, 10 + \sqrt{2}, 10 - \sqrt{2}$ とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 線分 AB の長さを求めなさい。
- (2) 弧 BC の長さを求めなさい。ただし、弧 BC の中心角は鋭角とする。



問題 4 次の問いに答えなさい。

- (1) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ を求めなさい。
(2) 座標平面上の曲線 C が、媒介変数 t を用いて

$$x = \sin 2t, \quad y = \sin^2 t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{5}{12}\pi \right)$$

で表されているとき、次の問いに答えなさい。

- (i) $\theta = 2t - \frac{\pi}{2}$ とおくと、 $\sin^2 t$ を $\sin \theta$ を用いて表しなさい。
(ii) $t = \frac{5}{12}\pi$ のときの C 上の点を P とするとき、 P の座標を求めなさい。
(iii) 座標平面上に C の概形をかきなさい。
(iv) C と線分 OP で囲まれた部分の面積を求めなさい。ここで、 O は座標平面の原点を表す。