令和２年度

入学者選抜学力検査

（後　期　日　程）

数　学

山口大学理学部　数理科学科

注意事項

1　試験開始の合図があるまで，問題冊子および解答用紙の中を見てはいけません。

2　配付物は，問題冊子１冊（１～３頁），解答用紙３枚および下書用紙２枚です。
試験開始後，直ちにそろっているか確認してください。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙や下書用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

4　試験開始後，すべての解答用紙に氏名および受験番号を記入してください。

5　解答は指定された解答用紙のおもて面に横書きで記入してください。
ただし，書ききれない場合は，おもて面右下の□内に✔印を記入のうえ，うら面を使用してください。

6　解答を指定された番号以外の解答用紙に記入した場合，採点の対象となりません。

7　問題冊子と下書用紙は持ち帰ってください。

〔1〕 (配点 60 点)　a を 1 より大きい実数とする。xy 平面において, 直線 $x = a$, 曲線 $y = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$ を, それぞれ, l, C とする。曲線 C 上の点 P における C の接線と直線 l との交点を Q とするとき, 次の問いに答えなさい。

(1) Q の y 座標を t とするとき, 線分 PQ の長さを t を用いて表しなさい。

(2) Q を中心とし P を通る円は, P の位置に関係なく定点を通ることを示しなさい。

〔2〕 (配点 70 点)　n は 3 以上の自然数, C_1 は平面上の半径 1 の円とする。D_1 を C_1 に内接し次の 3 つの条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たす n 個の円の組とする。

(i) すべての円の半径が等しい。

(ii) どの 2 円も 2 点で交わらない。

(iii) どの円も 2 つの円と外接する。

次に, D_1 の円すべてに外接する円を C_2 とし, D_2 を C_2 に内接し (i), (ii), (iii) をすべて満たす n 個の円の組とする。同様に, $k = 3, 4, \cdots$ に対して, D_{k-1} の円すべてに外接する円 C_k とそれに内接する n 個の円の組 D_k を考える。例えば $n = 7$ の場合, 図 1 の破線で描かれた円 C_1 に対して実線で描かれた 7 つの円の組は D_1 の例である。また, 図 2 の点線で描かれた円が C_2, その内部にある実線で描かれた 7 つの円の組が D_2 の例である。

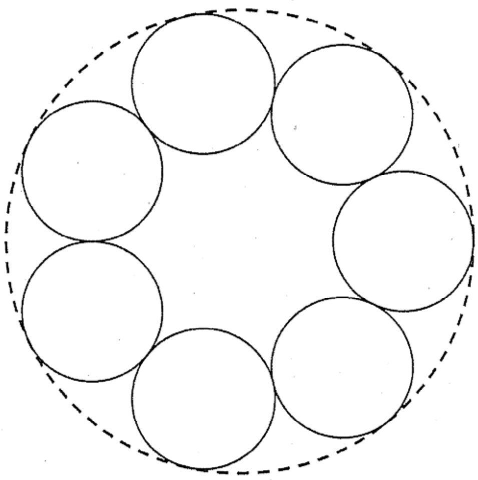

図 1

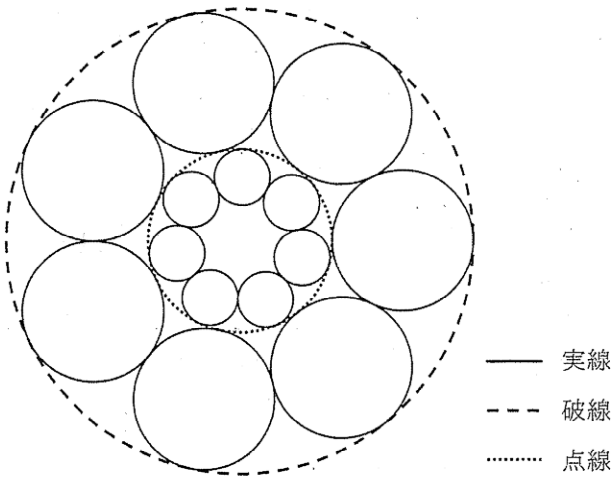

図 2

$k = 1, 2, \cdots$ に対して D_k の円の面積の総和を S_k と表すとき, 次の問いに答えなさい。

(1) D_1 の 1 つの円の半径を r_1 とするとき, r_1 を n を用いて表しなさい。

(2) C_2 の半径を R_2, D_2 の 1 つの円の半径を r_2 とするとき, R_2 と r_2 をそれぞれ n を用いて表しなさい。

(3) C_k の半径を R_k, D_k の 1 つの円の半径を r_k とするとき, R_k と r_k をそれぞれ k と n を用いて表しなさい。

(4) 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を T_n とおく。T_n を n を用いて表しなさい。また, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めなさい。

〔３〕 (配点 70 点)　n は正の整数とし, $f(x)$ を整数を係数とする n 次式とする。このとき, 次の問いに答えなさい。

(1) c を整数とし,

$$f(x+c) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \text{ は整数})$$

とおくとき,

$$a_0 = f(c), \qquad a_1 = f'(c)$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) p を素数とする。$f(c)$ が p の倍数であり, かつ, $f'(c)$ が p の倍数でないような整数 c が存在するとき,

$$kf'(c) + \frac{f(c)}{p}$$

が p の倍数となるような整数 k が存在することを示しなさい。

(3) (2) の c, k, p に対し, $f(kp+c)$ は p^2 の倍数であることを示しなさい。

(4) $f(x) = x^7 + 4x^5 + 4x^2 + 2$ とする。このとき, $f(m)$ が 121 の倍数になる整数 m を 1 つ求めなさい。