数　学

(配点 125)

問題 1 【必答問題】　一般項が $a_n = n(n+1)$ である数列を $\{a_n\}$ とし，

$$b_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。

(2) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めなさい。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ を求めなさい。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}$ を求めなさい。

(配点 125)

問題 2【必答問題】　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とし，空間の 4 点 O，A，B，C は次を満たすとする。

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1, \quad \angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \theta$$

$\cos\theta = p$ と表すとき，四面体 OABC の体積 V を p を用いて表したい。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S を p を用いて表しなさい。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を p を用いて表しなさい。

(3) 次を満たす点 D を考える。

$$\mathrm{OD} = 1, \quad \mathrm{OA} \perp \mathrm{OD}, \quad \mathrm{OB} \perp \mathrm{OD}, \quad 0 < \angle\mathrm{COD} < 90^\circ$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の形に表すとき，s，t，u をそれぞれ p を用いて表しなさい。また，$\cos\angle\mathrm{COD}$ を p を用いて表しなさい。

(4) V を p を用いて表しなさい。

(配点 125)

問題 3 【必答問題】　3 つの箱 A，B，C があり，それぞれ 100 個の球が入っている。1 個のさいころを投げ，1 の目が出たら箱 A の球を 2 個だけ箱 B に移動させ，2 または 3 の目が出たら箱 B の球を 3 個だけ箱 C に移動させ，4 以上の目が出たら箱 C の球を 4 個だけ箱 A に移動させる。n 回さいころを投げて球を移動させた後，箱 A，B，C に入っている球の数をそれぞれ $A(n)$，$B(n)$，$C(n)$ とする。ただし，$1 \leqq n \leqq 25$ とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $A(1) = 100$ である確率を求めなさい。

(2) $A(4) = 100$ である確率を求めなさい。

(3) $A(n) = B(n) = C(n)$ となる確率が 0 ではない n を求めなさい。また，その確率を求めなさい。ただし，確率は既約分数で分子と分母が素因数分解された形で表しなさい。

(配点 125)

問題 4 【選択問題】　複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について次の問いに答えなさい。

(1) $\triangle ABC$ が正三角形であるとき，$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ の値を求めなさい。

(2) $\gamma=-1+i$ とする。このとき，$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2+\alpha+\beta=(\alpha+\beta+2)i$ は，$\triangle ABC$ が正三角形であるための必要十分条件であることを示しなさい。

(配点 125)

問題 5 【選択問題】　次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $f(x) = (x-3)\sqrt{x} - \sqrt{2}$ の極値を求めなさい。

(2) 関数 $g(x) = |x-3|\sqrt{x} - \sqrt{2}$ の極値を求めなさい。

(3) 関数 $h(x) = \left(|x-3|\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)^2$ の極値を求めなさい。

教科・科目（数学）

問題訂正

数学

問題2 (3) 2行目

(誤)　$\underline{0} < \angle COD < 90^\circ$

(正)　$\underline{0^\circ} < \angle COD < 90^\circ$