

令和3年度
入学者選抜学力検査
(後期日程)

数 学

山口大学理学部 数理科学科

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、問題冊子および解答用紙の中を見てはいけません。
- 2 配付物は、問題冊子1冊(1～4頁)、解答用紙4枚および下書用紙2枚です。試験開始後、直ちに揃っているか確認してください。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙や下書用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 4 試験開始後、すべての解答用紙に氏名および受験番号を記入してください。
- 5 試験終了後、問題冊子、下書用紙は持ち帰ってください。

問題の選択と解答方法について

- 1 問題[1]、[2]は必答問題で、[3]、[4]は選択問題です。
- 2 必答問題[1]、[2]の解答は、それぞれの番号が書かれた解答用紙に記入してください。
- 3 選択問題[3]、[4]のいずれか1題を選択してください。選択した問題の解答は、選択した問題の番号が書かれた解答用紙に記入してください。
- 4 解答用紙4枚のうち、必答問題[1]、[2]の解答用紙2枚と、選択問題[3]、[4]で、選択した問題の解答用紙のみ1枚、合わせて3枚を提出してください。また、残りの解答用紙は、その後回収します。
- 5 解答は指定された解答用紙のおもて面に横書きで記入してください。
ただし、書ききれない場合は、おもて面右下の□内に✓印を記入のうえ、うら面を使用してください。

[1]【必答問題】(配点 350 点) j を自然数とする。 $S_j(n)$ を次のようにおく。

$$S_j(n) = 1^j + 2^j + \cdots + n^j = \sum_{k=1}^n k^j \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

例えば, $j = 2$ のとき,

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

となる。このとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) 数学的帰納法を用いて, すべての自然数 n について, 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$S_{j+1}(n) = - \sum_{k=1}^n S_j(k) + (n+1)S_j(n)$$

- (2) $S_4(n)$ を n を用いて, 因数分解した形で表しなさい。

[2] 【必答問題】(配点 300 点) 四角形 ABCD が円に内接しているとする。辺 DA, AB, BC, CD の長さをそれぞれ a, b, c, d で表し, $\angle DAB = \theta$ とおく。また, 四角形 ABCD の面積を T とする。このとき, 以下の問いに答えなさい。

(1) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd) \cos \theta$ が成り立つことを示しなさい。

(2) $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ が成り立つことを示しなさい。

ただし, $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ とする。

[3] 【選択問題】(配点 350 点) 座標平面上の曲線 $y = \log x$ ($x > 0$) を C とする。 C 上の異なる 2 点 $A(a, \log a)$, $P(t, \log t)$ における法線をそれぞれ l_1 , l_2 とし, l_1 と l_2 の交点を Q とする。また, 線分 AQ の長さを d とするとき, 以下の問いに答えなさい。ただし, 対数は自然対数とする。

- (1) d を a と t を用いて表しなさい。
- (2) P が A に限りなく近づくとき, d の極限値を r とする。 r を a を用いて表しなさい。
- (3) a が $a > 0$ の範囲を動くとき, (2) で求めた r の最小値を求めなさい。

[4] 【選択問題】 (配点 350 点) 座標平面内において、 $y = x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$) のグラフを曲線 C とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 曲線 C の概形をかきなさい。ただし、曲線 C の変曲点と凹凸は調べなくてよい。
- (2) $a > 1$ とする。曲線 C と直線 $y = ax$ の交点の座標を求めなさい。
- (3) $1 < a < b$ とする。曲線 C と直線 $y = ax$ および直線 $y = bx$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。
- (4) a, b が $b = 8a$ を満たすとする。 a が $a > 1$ の範囲を動くとき、(3) で求めた V の最小値を求めなさい。