令和３年度　入学者選抜学力検査問題

数　　学（理系β）

数学Ⅰ，数学Ａ
数学Ⅱ，数学Ｂ
数学Ⅲ

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子および解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題〔１〕～〔３〕は必答問題で，〔４〕，〔５〕は選択問題です。また，解答用紙は５枚あります。
3. 必答問題〔１〕～〔３〕の解答は，それぞれの番号が書かれた解答用紙に記入してください。
4. 選択問題〔４〕，〔５〕のいずれか１題を選択してください。選択した問題の解答は，選択した問題の番号が書かれた解答用紙に記入してください。
5. 解答用紙５枚のうち，必答問題〔１〕～〔３〕の解答用紙３枚と，選択問題〔４〕，〔５〕で，選択した問題の解答用紙<u>のみ１枚</u>，合わせて<u>４枚</u>を提出してください。
6. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
7. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部および氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に２箇所あります。
8. 解答は各問，指定された番号の解答用紙の<u>おもて面にだけ</u>記入してください。
9. 裏面その他に解答を記入した場合，その部分は採点の対象となりません。
10. 各問題の配点 50 点は 200 点満点としたときのものです。
11. 試験終了後，問題冊子および計算用紙は持ち帰ってください。

〔1〕【必答問題】（配点 50） 次の問いに答えなさい。ただし，m，n は自然数とする。

⑴ 10 以上 100 以下の自然数のうち，3 で割り切れるものの和を求めなさい。

⑵ 10 以上 $3m$ 以下の自然数のうち，3 で割り切れるものの和が 3657 であるとする。このとき，m の値を求めなさい。

⑶ 18 以上 $3n$ 以下の自然数のうち，15 との最大公約数が 3 であるものの和が 2538 であるとする。このとき，n の値を求めなさい。

〔２〕【必答問題】（配点 50） 箱の中に，1 から 3 までの番号が 1 つずつ書かれた 3 枚の赤いカードと，1 から 3 までの番号が 1 つずつ書かれた 3 枚の黒いカードが入っている。箱からカードを 1 枚ずつ無作為に取り出して，テーブルの上に，左から右へと取り出した順に並べていくとする。並べられた 6 枚のカードについて，次の問いに答えなさい。

⑴ 隣り合うどの 2 枚のカードも色が異なる確率を求めなさい。

⑵ 番号 1 が書かれている 2 枚のカードが隣り合わない確率を求めなさい。

⑶ 隣り合うどの 2 枚のカードも番号が異なる確率を求めなさい。

〔 3 〕 【必答問題】（配点 50） a，θ を $a > 0$，$0 < \theta < 2\pi$ を満たす定数とする。このとき，方程式

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x\cos\theta + 1}}{x^2 - 1} = a$$

の区間 $x > 1$ における実数解の個数は 1 個であることを証明しなさい。

〔4〕【選択問題】（配点 50） e を自然対数の底とする。t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし，座標平面において，曲線 $y = e^x$ 上に 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(t,\ e^t)$，$\mathrm{R}(1,\ e)$ をとる。点 Q における $y = e^x$ の接線と x 軸，および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれた図形の面積を $S_1(t)$ とする。また，線分 PQ と線分 QR と x 軸，および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする。さらに，$y = e^x$ と x 軸，および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれた図形の面積を S_0 とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，$S_1(t)$ の最大値を求めなさい。

(2) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，$S_2(t)$ の最小値を求めなさい。

(3) $S_0 \geqq S_1(t)$ であることを用いて，次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$e \geqq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

(4) $S_2(t) \geqq S_0$ であることを用いて，次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$e \leqq \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

必要ならば，$x > 1$ のとき

$$(x - 1)\log(x - 1) \geqq (x - 1)\log x - 1 + \frac{1}{2x}$$

が成り立つことを用いてよい。ただし，対数は自然対数とする。

〔5〕【選択問題】（配点 50） $f(x) = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$，$g(x) = 2\sin^2 x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) 2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の共有点の座標と $y = g(x)$ の増減，極値を調べ，この 2 つの曲線のグラフの概形をかきなさい。ただし，グラフの変曲点と凹凸は調べなくてよい。

(2) $I_n(x)$ を $I_n(x) = \int_0^x \sin^n t\, dt$ と定めたとき，次の式が成り立つことを示しなさい。

$$I_1(x) = 1 - \cos x$$

$$I_2(x) = \frac{x - \sin x \cos x}{2}$$

$$I_n(x) = -\frac{1}{n}\left\{\sin^{n-1} x \cos x - (n-1) I_{n-2}(x)\right\} \quad (n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$$

(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の共有点の x 座標のうち，0 以外で最小のものを α とする。区間 $0 \leqq x \leqq \alpha$ において 2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。