問題１　以下の問いに答えなさい。

等速円運動に関する以下の問いに答えなさい。図１は，質量mの小物体が点 O を中心として半径R，角速度ωで等速円運動しているようすを表しており，点 P と点 Q はそれぞれ時刻0とtにおける小物体の位置を表す。

（１）図１を用いて，小物体の速さv，半径R，角速度ωの関係を説明しなさい。必要であれば角度 ωt が十分に小さいとき，弦の長さ$\overline{PQ}$と円弧の長さ $R\omega t$ が等しいことを使ってよい。

（２）等速円運動において小物体に働く力は円の中心に向かう方向を向いており，向心力と呼ばれる。横軸を速度のx成分 v_x，縦軸を速度のy成分 v_y として図１と同様な図を速度$\vec{v}$に対して描き，向心力の大きさを小物体の質量 m ，半径 R ，角速度 ω を使って表しなさい。

（３）経過時間t が十分に小さいとき，小物体の変位 $\Delta\vec{r}$ は $\vec{v}t$ としてよい。このことを用いて，小物体が短い時間 t の間に向心力にされる仕事 W を求めなさい。さらに，なぜ力を受けているにも関わらず速さ v が一定なのか説明しなさい。

次に，惑星系を考える。図２は，恒星 A，及びその周囲を公転する惑星 B で構成される惑星系を表したものである。この惑星系に関する以下の問いに答えなさい。万有引力定数をG，円周率をπとする。

（４）以下の文章の$\boxed{}$に入る適切な式または数値を解答欄に記入しなさい。

恒星と惑星は万有引力で引き合っており，両者に働く力の大きさは恒星質量 M，惑星質量 m，恒星-惑星間の距離 Rを使って$\boxed{\text{ア}}$と表される。万有引力を向心力として，恒星と惑星は同じ周期 Tで，線分 AB 上にある点 O を中心に等速円運動しているとする（図２）。この時，距離$\overline{OA}$と距離$\overline{OB}$の比は$\overline{OA}:\overline{OB}=\boxed{\text{イ}}$となる。

さらに，（２）の結果を万有引力の大きさと比較することにより，恒星-惑星間の距離Rは周期T，恒星質量 M，惑星質量 m を用いて表せる。惑星質量 m は恒星質量 M に対して無視できるほど小さいとすると，その結果は$\boxed{\text{ウ}}$となる。恒星の等速円運動の速さ v_A は$\boxed{\text{エ}}$と表される。

これらの結果を用いれば，恒星質量 M，等速円運動の速さ v_A，周期 Tから，惑星質量 mと恒星-惑星間の距離 Rが決定できる。恒星の質量が太陽の 0.5 倍（1×10^{30} kg），速さ v_Aが30 m/s，周期が 4.6 日（4×10^5s）であるとき，惑星の質量 mと恒星-惑星間の距離 Rはそれぞれ有効数字１桁で$\boxed{\text{オ}}$ kg，$\boxed{\text{カ}}$ m と求まる。ただし，$2\pi G=4\times10^{-10}$ $\mathrm{m^3/(kg\ s^2)}$とする。この惑星は質量が木星程度で恒星の近くを公転しているため，ホット・ジュピターと呼ばれている。

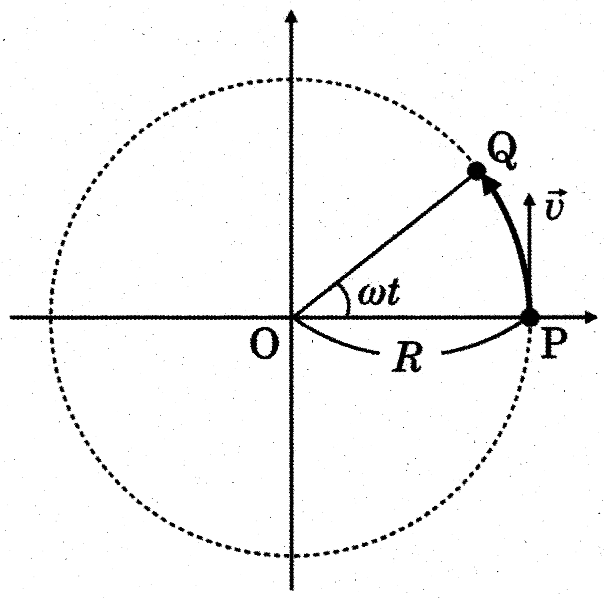

図１

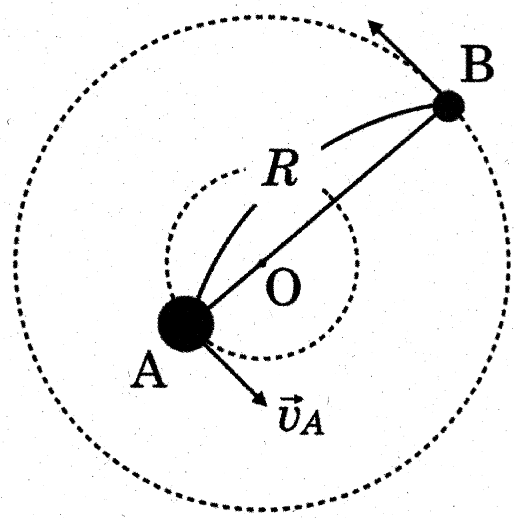

図２

問題２　以下の問いに答えなさい。

図１のようなサイクロトロン加速器を考える。

中空の電極 A_1，A_2 をわずかなギャップを開けて置き，それぞれの間に交流電圧$V(t)$を印加する。また両方の電極に紙面表から裏の向きへ磁束密度B_0の一様な磁場をかけてある。原点 O から紙面に平行な方向に射出された帯電した粒子は，磁場から力を受けて円軌道を描き，ギャップを横切るたびに加速され，軌道半径が大きくなっていく。電極の大きさは粒子の軌道に比べて十分大きいとする。ただし電極は静電遮蔽(しゃへい)されているため内部の電場は０であり，粒子は外部電場の影響を一切受けず，ギャップ間に生じる電場のみから力を受けるものとする。

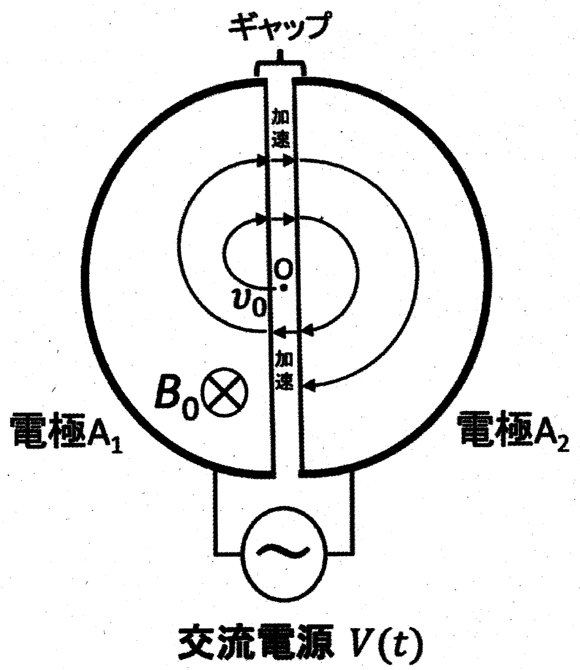

図 1: サイクロトロン加速器の概念図

(1)　点 O から電荷qを持つ粒子を初速度v_0で A_1 側へ射出したとき，時計回りの円軌道を描いた。この粒子が持つ電荷の符号は正負のどちらであるか答えなさい。

(2)　円軌道の半径がRとなる初速度v_0を求めなさい。ただし粒子の質量をmとし，答えはq，R，B_0，mを用いて表すこと。

(3)　この時 A_1 を半周して A_2 に入る時間を求めなさい。答えはq，B_0，mを用いて表すこと。

交流電源の周期と粒子の円運動の周期を常に一致させ，粒子がギャップを横切る際に加速電圧が最大となるようにしながら粒子を繰り返し加速する。

(4)　交流電圧の振幅をV_0に固定したとき，半径が $2R$に到達するまで加速するには何回転する必要があるかを求めなさい。答えはq，R，B_0，m，V_0を用いて表すこと。

半径が $2R$になったときの粒子の速度をv_1とする。今度は半径が一定となるように磁場の強さを変化させながらさらに粒子を加速することを考える。

(5)　ギャップを通過する際にエネルギーを受け取るため，粒子の速度は変化する。速度v_1でギャップを通過した際の速度変化 Δvを v_1，q，V_0，mを用いて表しなさい。ただし加速であることに注意すること。

(6)　半径を$2R$に維持するために必要な磁束密度の変化 ΔBは，$\Delta v \ll v_1$の条件下では v_1に反比例する。この時のΔBを R，V_0，v_1を用いて表しなさい。ただし(1)の結果に対してxが十分小さいとき， $\sqrt{1+x}$ を $1+\frac{1}{2}x$ と近似できることを利用して式を簡単にすること。

粒子が電極内部を半周するのに要する時間をT_1，T_2，T_3，…とし，そのたびに粒子を加速していく。ただし，交流電源の電圧を時刻 $t=0$ で 0 とし，電圧の振幅はV_0で一定とする。

(7)　T_1からT_6までの交流電圧の概形として，最も適したものを図 2 の A，B，C，D から選び，その理由を説明しなさい。

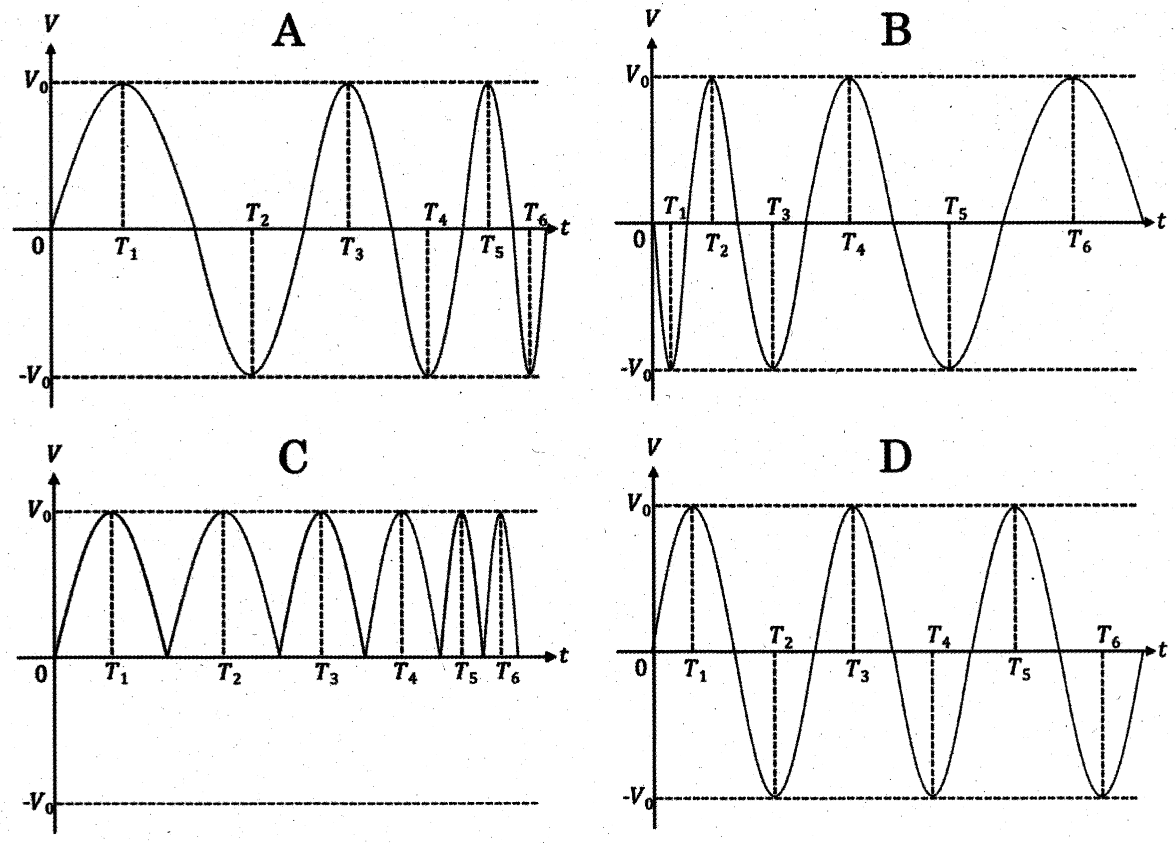

図 2: 電圧波形

問題３　以下の問いに答えなさい。

理想気体を用いた熱機関を考える。n〔mol〕の理想気体は，圧力をp，体積をV，絶対温度をT，気体定数をRとしたとき，状態方程式$pV = nRT$に従うことが知られている。また，理想気体の内部エネルギーは$U = \frac{3}{2}nRT$と書けることが知られている。さらに，理想気体は断熱変化においてpV^{γ} =(一定)を満たすことが知られている（ポアソンの法則）。ただし，γはある定数である。

(1) n〔mol〕の理想気体を図1のようにA→B→C→D→Aと状態変化させる。点A，B，C，Dでの絶対温度をそれぞれT_A，T_B，T_C，T_Dとする。状態変化に関する以下の説明文(a)～(e)の文中の［ア］～［セ］の中に入る式または数値を答えなさい。ただし，式で答える場合はn，R，V_1，V_2，T_A，T_B，T_C，T_D，γのみを用いてよいとする。

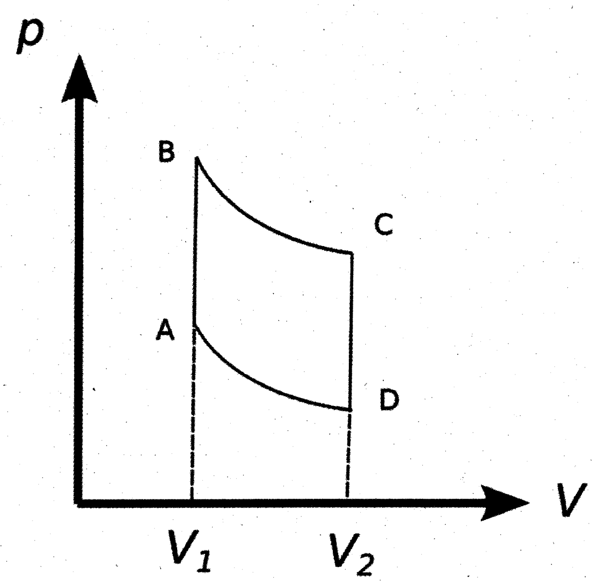

図 1

(a) 状態変化A→Bは体積をV_1とした定積変化である。この過程で気体が外部からされる仕事は$W_{A\to B}$ =［ア］である。また，気体の内部エネルギー変化は$\Delta U_{A\to B}$ =［イ］である。熱力学第一法則より，この過程で気体が外部から得た熱量は$Q_{A\to B}$ =［ウ］である。

(b) 状態変化B→Cは断熱変化である。状態Bでの圧力はp_B =［エ］である。また，状態Cでの圧力はp_C =［オ］である。これらの圧力に対して，ポアソンの法則$p_B V_1^{\gamma} = p_C V_2^{\gamma}$が成り立つ。

(c) 状態変化C→Dは体積をV_2とした定積変化である。この過程で気体が外部からされる仕事は$W_{C\to D}$ =［カ］である。また，気体の内部エネルギー変化は$\Delta U_{C\to D}$ =［キ］である。熱力学第一法則より，この過程で気体が外部から得た熱量は$Q_{C\to D}$ =［ク］である。

(d) 状態変化D→Aは断熱変化である。状態Dでの圧力は$p_D =$ $\boxed{\text{ケ}}$である。また，状態Aでの圧力は$p_A =$ $\boxed{\text{コ}}$である。これらの圧力に対して，ポアソンの法則$p_D V_2^{\gamma} = p_A V_1^{\gamma}$が成り立つ。

(e) このサイクルにおいて気体が吸収した熱量Q_1 $(Q_1 > 0)$は$Q_1 =$ $\boxed{\text{サ}}$であり，放出した熱量Q_2 $(Q_2 > 0)$は$Q_2 =$ $\boxed{\text{シ}}$である。気体はサイクルにより初めの状態Aに戻るので，サイクルを一周したときの内部エネルギー変化は$\Delta U =$ $\boxed{\text{ス}}$である。よって，このサイクルにおいて気体が外部に対して行う仕事は$W =$ $\boxed{\text{セ}}$である。

(2)　(1)の熱機関の熱効率$\frac{W}{Q_1}$をV_1，V_2，γのみを用いて表しなさい。

理　科

R4-後-物情
（配点 125）

問題４　以下の問いに答えなさい。

ウランやラジウムなどの$\boxed{\text{ア}}$の原子核は非常に不安定であり，放射線を出して他の原子核に変わる。したがって，$\boxed{\text{ア}}$の原子核の数は時間とともに少なくなっていく。また，このように自然と放射線を出す性質を$\boxed{\text{イ}}$という。天然の$\boxed{\text{ア}}$から放出される放射線には３つの種類があり，それぞれ$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$と呼ばれている。

残っている$\boxed{\text{ア}}$の原子核の数が，もとの数の半分になる時間を$\boxed{\text{カ}}$という。$\boxed{\text{ア}}$のはじめの原子核の数をn_0，$\boxed{\text{カ}}$をTとすると，時間がtだけ経過したあとの同原子核の数nは

$$\boxed{\quad \text{式1} \quad}$$

と表すことができる。

（１）　空欄$\boxed{\text{ア}}$から$\boxed{\text{カ}}$に入る語句を答えなさい。

（２）　下線で引かれている現象を何と呼ぶか答えなさい。

（３）　式１に入る式を答えなさい。

（４）　いま，２種類の$\boxed{\text{ア}}$であるＡおよびＢをそれぞれ一定量用意し，約１ヶ月かけて観察をしたところ，Ａについては観察開始時とほぼ同数の原子核が残っていた。一方，Ｂについては原子核の数がもとの数のおよそ 16 分の１にまで減っていた。Ａ，Ｂそれぞれに対応すると思われるものを以下の表の中から選び，a~e の記号で答えなさい。

$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{カ}}$
a.　リン 32（^{32}P）	約 14 日
b.　ヨウ素 131（^{131}I）	約 8 日
c.　ラドン 222（^{222}Rn）	約 4 日
d.　フッ素 18（^{18}F）	約 2 時間
e.　セシウム 137（^{137}Cs）	約 30 年