数　学

(配点 125)

問題1　2つの箱 A，B がある。

箱 A には，赤玉が7個，白玉が3個入っている。
箱 B には，赤玉が4個，白玉が6個入っている。

このとき，以下の問いに答えなさい。

(1) 箱 A および箱 B からそれぞれ1個ずつ玉を取り出すとき，取り出した2個の玉のうち，少なくとも1個が赤玉である確率を求めなさい。

(2) 箱 A から1個，箱 B から2個，玉を取り出すとき，取り出した3個の玉がすべて赤玉である確率を求めなさい。

(3) 箱 A および箱 B からそれぞれ2個ずつ玉を取り出すとき，取り出した4個の玉のうち，少なくとも1個が赤玉である確率を求めなさい。

(配点 125)

問題 2　平面上に点 O と △ABC がある。また,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

となる点 P をとる。線分 BC と直線 AP は交わり，その交点を D とする。点 D が直線 BC 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる実数 k がある。また，点 D が直線 AP 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \ell\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となる実数 ℓ がある。このとき，以下の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ および k を用いて表しなさい。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ および ℓ を用いて表しなさい。

(3) BD : DC を求めなさい。

(配点 125)

問題 3　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。このとき，以下の問いに答えなさい。

(1) $a_n = 2n-1$ であるとき， S_n を求めなさい。また，一般に，数列 $\{a_n\}$ について， 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\sum_{j=1}^{n} j a_j = (n+1)S_n - \sum_{j=1}^{n} S_j$$

(2) 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(配点 125)

問題 4　関数

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{\log t}{t^3}dt \quad (x \geqq 1)$$

について，以下の問いに答えなさい。ただし，対数は自然対数とする。

(1) 部分積分の公式を用いて $f(x)$ を求めなさい。

(2) $f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフをかき，最大値を求めなさい。ただし，グラフの変曲点や凹凸は調べなくてよい。必要ならば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$$

が成り立つことを用いてよい。